

# Використання дробових похідних за часом для дослідження фільтрації газу в пористих середовищах

Н.Б. Лопух  
Центр математичного моделювання  
ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
Lopuh.nazar@gmail.com

Я.Д. П'янило  
Центр математичного моделювання  
ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
danylo794@gmail.com

О. Б. Браташ  
Центр математичного моделювання  
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
olebra31@gmail.com

## The use of fractional derivatives in time to investigate gas filtration in porous media

N.B. Lopuh  
Center of Mathematical Modeling  
IAPMM by Ya.S.Pidstryhach NAS of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
Lopuh.nazar@gmail.com

Ya.D. P'yanylo  
Center of Mathematical Modeling  
IAPMM by Ya.S.Pidstryhach NAS of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
danylo794@gmail.com

O. B. Bratash  
Center of Mathematical Modeling  
IAPMM by Ya.S.Pidstryhach NAS of Ukraine  
Lviv, Ukraine  
olebra31@gmail.com

**Анотація**—Побудовано модифікований метод скінченних елементів із використанням схеми Грюнвальда-Летнікова для дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капутто та Ріммана-Ліувіля. Проведено числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних. Результатами експерименту підтверджено характер поведінки тиску газу у пористому середовищі за наявності нетипової фільтрації. Встановлено, що порядок дробової похідної може служити параметром адаптації математичної моделі.

**Abstract**—Built modified finite element method using Grunwald Letnikov scheme for fractional derivatives in time.

Considered fractional derivatives Caputo and Riman-Liouville.

**Ключові слова**—схема Грюнвальда-Летнікова; дробові похідні; метод скінченних елементів

**Keywords**—Grunwald-Letnikov scheme; fractional derivatives; finite element method

### I. ВСТУП

Відомо, що багато фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких враховуються похідні дробових порядків. Область застосовності диференціальних рівнянь дробового порядку значно ширша, ніж

диференціальних рівнянь з цілочисловим диференціюванням, оскільки останні є їх частковим випадком.

Підвищений інтерес до диференціальних рівнянь дробового порядку обумовлено їх фізичною інтерпретацією. Показано, що перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє враховувати ефекти пам'яті системи. Це дозволяє отримувати принципово нові результати, більш глибоко осмислити відомі результати, створити нові адекватні кількісні моделі досліджуваних явищ.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial y} \right) = 2mh \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( \frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right) \quad (1)$$

Тут  $l=2$  для газу та  $l=1$  для нестисливої рідини;  $\alpha \in (0, 2]$  – степінь дробової похідної;  $k = k(x, y, t)$ ,  $m = m(x, y)$  та  $h = h(x, y)$  коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно;  $\mu$  – динамічна в'язкість речовини,  $p_{at}$  – атмосферний тиск,  $q$  – густина відбору,  $\chi$  – коефіцієнт стисливості газу.

Числова модель базується на методі скінченних елементів в поєднанні з ітераційною процедурою, що діє на кожному часовому підінтервалі. Дробова похідна  $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$  розкладається за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p(\tau - j\Delta t). \quad \text{Оператор}$$

Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжку  $[0, \tau]$  з підінтервальним кроком  $\Delta t$  як

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t)$$

Схема МСЕ застосовується ітераційно для лінеаризованого рівняння для кожного моменту часу із уточненням коефіцієнтів стисливості та проникності.

## ВИСНОВКИ

В праці на базі методу скінченних елементів запропоновано числову модель фільтрації газу в пористих неоднорідних середовищах із використанням дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капутто та Ріммана-Ліувіля. Проведений числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] R. Carmona & M. Ludkovski (2005), "Gas storage and supply guarantees: an optimal switching approach," submitted to Management Science.
- [2] Cook, Robert D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition, John Wiley & Sons, 2002.
- [3] Н. Лопух, М. Притула, Н. Притула, Я. П'янило, "Розрахунок початково-граничних умов у задачах фільтрації газу в пористих середовищах", в Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології, 2009.
- [4] Я.Д.П'янило, Н.Б.Лопух, П.П.Галій Числова модель пласта підземного сховища газу на основі методу скінченних елементів в "Нафтова і газова промисловість", 2011.