Гістерезисна стратегія для систем з обмеженим числом повторних спроб

О.В. Прищепа
кафедра прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна
o.v.pryshchepa@nuwm.edu.ua

Hysteresis strategy for retrial queue with limited number of retrials

Pryshchepa O.V.
Department of Applied Mathematics
National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine,
o.v.pryshchepa@nuwm.edu.ua

***Анотація*—В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку для багатоканальної системи з обмеженим числом спроб почати обслуговування. Для даної системи використовується гістерезисна стратегія керування. Знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі.**

***Abstract*—In this paper, an optimal control problem of rate of the input flow for retrial queue with limited number of retrials is considered. Hysteresis strategy for this system is used. The effective algorithm for stationary probabilities and explicit form of quality functional in the stationary regime are found.**

Ключові слова—стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, гістерезисна стратегія, оптимізація

Key words—retrial queue, service process, stationary probabilities, hysteresis strategy, optimization

I. Вступ

В класичній теорії систем масового обслуговування, зазвичай, припускається, що вимога, яка надійшла в систему при зайнятості всіх каналів обслуговування, або стає в чергу та потім обслуговується відповідно до визначеної дисципліни, або ж залишає систему. Інколи нетерплячі вимоги залишають чергу, тоді вони вважаються втраченими назавжди. Таким чином, класичні моделі теорії масового обслуговування не беруть до уваги можливість повторного звернення вимог до системи та не можуть використовуватися для розв'язку практично важливих задач. Саме тому, слід розглядати системи масового обслуговування з повторними викликами, в яких вимоги, що надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, повертаються після деякого періоду часу, щоб отримати обслуговування. Особливе значення такі системи мають для комп'ютерних та телекомунікаційних мереж. Більш детально порівняльний аналіз класичних систем та систем з повторними викликами проведено в роботах [1], [2] . При цьому для систем з повторними викликами покладають, що повторне звернення здійснюються до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних звернень до системи часто буває обмеженим (див. [3]). Дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

II. Марковська модель

В роботі, що пропонується розглядається багатоканальна система масового обслуговування з однією спробою повтору. Це означає, що вимога, яка отримала відмову, залишає систему та має можливість повторно звернутися для обслуговування лише один раз через деякий випадковий проміжок часу, який має показниковий розподіл з параметром ν. Якщо при повторному звернені всі прилади є зайняті, то вимога залишає систему назавжди. Ззовні вимоги надходять до системи з інтенсивністю λ_j, яка залежить, в свою чергу, від кількості джерел повторних викликів на поточний момент. Час обслуговування вимог є показниково розділеною випадковою величиною з параметром μ.

У загальному випадку при довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, тому розглянемо урізану модель даної системи, в якій скінченне число N місць для повторних викликів, що можуть зробити одну повторну спробу .

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі в класі гістерезисних стратегій.

Процес керування на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2, які називаються порогами, $H_1 \le H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1, то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність надходження вимог дорівнює h_1 Якщо кількість повторних викликів стає більшою за H_2, то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_2. У випадку, коли кількість повторних викликів лежить у проміжку $(H_1, H_2]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу. Пороги H_1 та H_2 приймають значення $0, 1, ..., N$. Якщо $H_1 = N$, то при будь-якій кількості джерел повторних викликів система знаходиться в першому режимі. У випадку $H_1 = H_2$ $\left((H_1, H_2] = \varnothing\right)$ маємо частковий випадок керування при пороговій стратегії.

При фіксованій гістерезисній стратегії $(H_1, H_2]$ стан системи може бути описаний тривимірним процесом

$$Q(t, H_1, H_2) = \{Q_1(t, H_1, H_2), Q_2(t, H_1, H_2), R(t, H_1, H_2), t \ge 0\}$$

де $Q_1(t, H_1, H_2)$ – кількість зайнятих приладів в момент часу t, $Q_2(t, H_1, H_2)$ – кількість джерел повторних викликів момент часу t, $R(t, H_1, H_2)$ – режим роботи системи момент часу t. Якщо $R(t, H_1, H_2) = 1$, то система працює в першому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_1. Якщо $R(t, H_1, H_2) = 2$, то система працює в другому режимі з інтенсивністю надходження вимог h_2.

Процес $Q(t, H_1, H_2)$, $t \ge 0$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S = S^1 \cup S^2$, де $S^1 \cap S^2 = \varnothing$, $S^1 = \{i = (i, j, 1) : i = 0, ..., c; j = 0, ..., H_2\}$,

$$S^2 = \{i = (i, j, 2) : i = 0, ..., c; j = H_1 + 1, ..., N\}.$$

III. Дослідження стаціонарного режиму

Далі основною метою є побудова формул для стаціонарних ймовірностей системи, що розглядається через її параметри. Позначимо $\pi_{ij}(r)$, $(i, j) \in S$ стаціонарний розподіл системи.

Введемо наступні позначення:

$$e_i(c+1) = \left(\delta_{i0} \quad \delta_{i1} \quad \dots \quad \delta_{ic}\right)^T, \text{ де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \ne j; \end{cases}$$

$$e(c+1) = \left(1 \quad 1 \quad \dots \quad 1\right)^T;$$

$$\pi_j(r) = \left(\pi_{0j}(r), \pi_{1j}(r), ..., \pi_{cj}(r)\right)^T;$$

$$A_j(r) = \left\| a_{ik}^j(r) \right\|_{i,k=0}^c,$$

$$\text{де } a_{ik}^j(r) = \begin{cases} -h_r, \ \textit{при } k = i-1, \ i = 1, ..., c-1, \\ (h_r + i\mu + j\nu), \ \textit{при } k = i, \ i = 0, ..., c-1, \\ h_r, \ \textit{при } k = i = c, \\ -(i+1)\mu, \ \textit{при } k = i+1, \ i = 0, ..., c-1, \\ 0, \ \textit{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$\mathrm{B}_j(r) = \left\| b_{ik}^j(r) \right\|_{i,k=0}^c,$$

$$\text{де } b_{ik}^j(r) = \begin{cases} (j+1)\nu, \ \textit{при } k = i-1, \ i = 1, ..., c-1, \\ (j+1)\nu, \ \textit{при } k = 0, ..., c \wedge i = c \\ 0, \ \textit{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$C_j(r) = \left\| c_{ik}^j(r) \right\|_{i,k=0}^c,$$

$$\text{де } c_{ik}^j(r) = \begin{cases} (H_1 + 1)\nu, \ \textit{при } i = c \wedge k = 0, ..., c, \\ 0, \ \textit{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$D = \left\| d_{ik} \right\|_{i,k=0}^c,$$

$$\text{де } d_{ik} = \begin{cases} 1, \ \textit{при} \quad k = 0, i = 0, \\ a_{i-1k}^N(2), \ \textit{в іншому випадку}; \end{cases}$$

$$F_j(1) = \begin{cases} \prod_{i=j}^{H_1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \times \\ \times \left[I + \sum_{k=H_1+1}^{H_2} \left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1) \right], \\ \qquad j = 0, ..., H_1, \\ \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(1) B_i(1) \right) A_k^{-1}(1) C_k(1), j = H_1 + 1, ..., H_2; \end{cases}$$

(за домовленістю $F_{H_2+1}(1)$ дорівнює нульовій матриці);

$$F_j(2)=\left\{I-\sum_{k=j}^{H_2}\left(\prod_{i=j}^{k-1}A_i^{-1}(2)B_i(2)\right)A_k^{-1}(2)C_k(2)\times\right.$$

$$\times\left[I+\sum_{k=H_1+1}^{H_2}\left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1}A_i^{-1}(2)B_i(2)\right)A_k^{-1}(2)C_k(2)\right]^{-1}\times$$

$$\left.\times\prod_{i=H_1+1}^{j-1}A_i^{-1}(2)B_i(2)\right\}\prod_{i=j}^{N-1}A_i^{-1}(2)B_i(2),\ j=H_1+1,...,N-1.$$

Покладемо $F_N(2)=I=\left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=0}^{c}$ – одинична матриця.

Для стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}(r)$ справедливий наступний результат.

Теорема 1. Якщо параметри моделі типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору є невироджені $h_1,h_2,\mu,\nu>0$, то для процесу обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$, $t\geq 0$ існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності мають вигляд:

$$\pi_j(1)=\pi_{0N}(2)F_j(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_0(c+1),\ j=0,1,...,H_2,$$

$$\pi_j(2)=\pi_{0N}(2)F_j(2)D^{-1}e_0(c+1),\ j=H_1+1,...,N,$$

де $$\left(\pi_{0N}(2)\right)^{-1}=e^T(c+1)\times$$

$$\times\left(I+\sum_{j=0}^{H_2}F_j(1)F_{H_1+1}(2)+\sum_{j=H_1+1}^{N}F_j(2)\right)D^{-1}e_0(c+1).$$

IV. Оптимізаційна задача

В роботі розглядається оптимізаційна задача

$$C_1S_1(H_1,H_2)+C_2S_2(H_1,H_2)-$$
$$-C_3S_3(H_1,H_2)-C_4S_4(H_1,H_2)\to\max \qquad (1)$$
$$H_1,H_2\in\{0,1,...\},\ H_1\leq H_2,$$

де $S_1(t,H_1,H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в першому режимі; $S_2(t,H_1,H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в другому режимі; $S_3(t,H_1,H_2)$ – число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_4(t,H_1,H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в першому режимі; C_2 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в другому режимі; C_3 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_4 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $S_i(H_1,H_2)$, $i=\overline{1,4}$ існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H_1,H_2)=\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{H_2}i\mu\pi_{1j}(1),$$

$$S_2(H_1,H_2)=\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=H_1+1}^{\infty}i\mu\pi_{1j}(2),$$

$$S_3(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2}h_1\pi_{cj}(1)+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}h_2\pi_{cj}(2),$$

$$S_4(H_1,H_2)=h_1\pi_{cH_2}(1)+\left(H_1+1\right)\nu\sum_{i=0}^{c}\pi_{iH_1+1}(2).$$

Розв'язком задачі (1) є такі пороги H_1,H_2, які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [4]-[6].

Висновок

В даній роботі проведено дослідження системи з обмеженнями на число повторних спроб при керуванні інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Для даного типу керування знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд залежності функціоналу якості від параметрів системи в стаціонарному режимі, що дає алгоритм розв'язку відповідної оптимізаційної задачі.

Література References

[1] ArtalejoJ.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. - Springer, 2008. – 318 p.

[2] Falin G. I. and Templeton J. G. C.Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.

[3] Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08), Lijiang, China; October 31-November 3, 2008, pp. 237–247.

[4] Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети. //Автоматика и вычислительная техника.- 1991.-№ 2.-С.25-31.

[5] Лебедев Е.А., Пономарьов В.Д. Управление интенсивностью обслуживания в системах с повторными вызовами // Кибернетика и системный анализ. - 2011. - Вып. №3. - С. 118-126.

[6] Пономарьов В.Д. Оптимізація інтенсивності обслуговування в системах з повторами і скінченним числом джерел вимог // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія: оптимізація. - 2010. - Вип. № 2 (101). - С. 105-112.