

Моделювання стаціонарних процесів теплопровідності в тілах випадкової структури з використанням діаграм Фейнмана

О.Ю. Чернуха
відділ математичного моделювання
нерівноважних процесів

Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України
Львів, Україна
cher@cmm.lviv.ua

Modeling steady-state processes of heat transfer in bodies of random structure using Feynmann diagrams

O. Chernukha
Department of mathematical modeling
nonequilibrium processes

Centre of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute
for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Ukrainian Academy of Sciences
Lviv, Ukraine
cher@cmm.lviv.ua

Анотація—Робота присвячена математичному моделюванню стаціонарних процесів теплопровідності у випадково неоднорідних багатофазних структурах. Крайовий задачі теплопровідності поставлено у відповідальність інтегродиференціальне рівняння з випадковим ядром, розв'язок якого побудований у вигляді ряду Неймана. З допомогою техніки діаграм Фейнмана отримано аналоги рівняннь Дайсона і Бета-Солпітера для стаціонарних процесів теплопровідності у багатофазних стохастично неоднорідних тілах.

Abstract—The work is devoted to mathematical modeling steady-state processes of heat transfer in randomly nonhomogeneous multiphase structures. An integro-differential equation with random kernel, which solution is constructed in terms of Neumann series, is obtained in accordance with the boundary value problem of heat transfer. By using the technique of Feynman diagrams analogues of equations of both Dyson and Bethe-Solpeter for the steady-state heat transfer processes in multiphase stochastically nonhomogeneous bodies are obtained.

Ключові слова—математичне моделювання; теплопровідність; стохастична структура; діаграма Фейнмана

Keywords—mathematical modeling; heat transfer; stochastic structure; Feynmann diagram

I. Вступ

Стохастичний характер теплових полів, як правило, спричинений недостанньою інформацією про неоднорідну структуру середовища [1]. При дослідженні теплових полів у випадково неоднорідних тілах (рис.1) розробляють методи, які використовують умову ергодичності (квазі-ергодичності, тобто поля є ергодичними лише в об'ємах,

малих порівняно з характерними масштабами змін статистичних характеристик поля) досліджуваних процесів [2, 3], при постановці крайових задач записують рівняння, отримання яких вимагає введення фізично малого репрезентативного елемента тіла, що накладає обмеження на відповідні випадкові поля. Нижче за допомогою техніки діаграм Фейнмана досліджується в стаціонарному режимі процес теплопровідності у випадково неоднорідних тілах для довільних розмірів включень. При цьому джерела тепла описуються детермінованою функцією, а структура тіла є випадковою.

II. Моделювання стаціонарних процесів теплопровідності в тілах випадкової структури

Нехай в багатофазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями (рис. 1) протікають процеси теплопровідності. Тіло складається з N різних за густинною фаз (матриці та включень), в яких теплофізичні властивості можуть істотно відрізнятися. При цьому точна геометрична конфігурація фаз невідома.

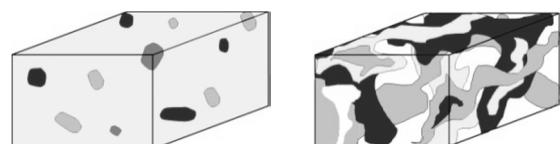


Рис. 1. Можливі реалізації багатофазної структури тіла

Розподіл випадкового температурного поля $T(\vec{r})$ в такому тілі у стаціонарному випадку описує рівняння тепlopровідності

$$L(\vec{r})T(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (\lambda(\vec{r})\vec{\nabla} T(\vec{r})) = f(\vec{r}), \quad (1)$$

де $L(\vec{r})$ - випадковий оператор рівняння тепlopровідності, \vec{r} - радіус-вектор біжучої точки, $\lambda(\vec{r})$ - випадковий коефіцієнт тепlopровідності, $f(\vec{r})$ - густина джерел тепла (детермінована функція). Вважаємо, що на поле температури $T(\vec{r})$ накладені детерміновані граничні умови.

Гранична задача (1) зведена до інтегро-диференціального рівняння типу Гаммерштейна:

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') T(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (2)$$

де $T_0(\vec{r})$ - розв'язок «однорідної» задачі:

$$\bar{L}(\vec{r})T_0(\vec{r}) - f(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

з вихідними граничними умовами; $G(\vec{r}, \vec{r}')$ - детермінована функція Гріна, яка є розв'язком рівняння з точковим джерелом

$$\bar{L}(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}') - f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4)$$

за відповідних нульових граничних умов; $L_s(\vec{r})$ - випадковий оператор вигляду

$$L_s(\vec{r}) = \bar{L}(\vec{r}) - L(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{\lambda} - \lambda_j) \eta_{ij}(\vec{r}) \Delta + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) \vec{\nabla},$$

де $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\vec{r})}$ - усереднений за ансамблем реалізацій структури коефіцієнт тепlopровідності,

$\eta_{ij}(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in (V_i^{(j)}) \\ 0, & \vec{r} \notin (V_i^{(j)}) \end{cases}$ - випадкова функція просторових координат, $[\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}}$ - вектор-функція стрибка коефіцієнта тепlopровідності на міжфазних границях, $(V_i^{(j)})$ - однозв'язна область з об'ємом $V_i^{(j)}$, яку займає j -те включення j -ї фази.

Розв'язок рівняння (2) будуємо методом послідовних наближень, вибираючи за нульове наближення розв'язок задачі (3). Тоді отримаємо рекурентні спiввiдношення, яким ставимо у вiдповiднiсть ряд Нейманa

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\vec{r}), \quad (5)$$

Тут $R_n(\vec{r})$ - рiзниця мiж n -м та $(n-1)$ -м членами.

Встановлено умови i доведено теорему про абсолютну i рiвномiрну збiжнiсть цього ряду [4]. На вiдмiнu вiд

нестaционарного вiпадку, коли для збiжностi ряду Нейманa для вiпадкового поля температури достатньo умови обмеженостi теплофiзичних коефiцiєнтiв фаз та вiдмiнностi вiд нуля параметрiв матрицi, для стaционарної тепlopровiдностi необхiдна додаткова умова на обмеженiсть об'ему тiла або обмеженiсть об'ему, якi займають вiклuчення. Також сформульовано i доведено теорему iснування розв'язку iнтeгро-диференцiальногo рiвняння.

Щоб дослiдити структуру ряду (5), введено графiчне зображенiя його елементiв у виглядi дiаграм Р.Фейнманa [5]. Тодi ряд (5) у графiчному виглядi набуде вигляду [6]:

$$\begin{aligned} \text{---} = & \sim + \text{---} \atop \vec{r}' + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''' + \dots + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''' \vec{r}^{(n)} + \dots \\ & + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}''' \dots + \text{---} \atop \vec{r}^{(n-1)} \vec{r}^{(n)} + \dots \end{aligned} \quad (5a)$$

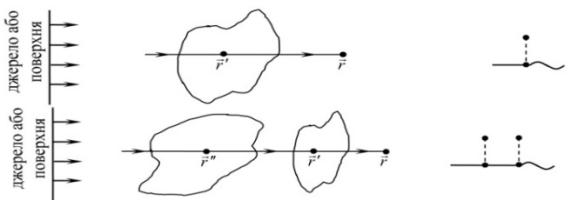
де $T(\vec{r}) \sim \text{---}$, $T_0(\vec{r}) \sim \sim$, $G(\vec{r}, \vec{r}') \sim \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}''$, $L_s(\vec{r}) \sim \text{---} \atop \vec{r}'$.

Усереднене за ансамблем конфiгурацiй фаз теплове поле можна подати так

$$\begin{aligned} \text{---} = & \sim + \text{---} \atop \vec{r}' + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''' + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''' \vec{r}^{(k)} + \dots \\ & + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}''' \dots + \text{---} \atop \vec{r}^{(n-1)} \vec{r}^{(n)} + \dots + \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \vec{r}''' \vec{r}^{(k)} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\langle T(\vec{r}) \rangle \sim \text{---}$, $\Psi_k(\vec{r}', \vec{r}'', \dots, \vec{r}^{(k)}) \sim \text{---} \atop \vec{r}' \vec{r}'' \dots \vec{r}^{(k)}$

Дiаграми Фейнманa, за допомогою яких представлений ряд Нейманa (6), мають прозору фiзичну iнтерпретацiю. Дiаграма 1 з ряду (6) описує поширення теплового поля з джерела або вiд поверхнi (в залежностi вiд граничних умов та наявностi внутрiшнiх джерел тепла) в однорiдному середовищi. Дiаграма 2 описує наступний процес: теплове поле поширюється вiд джерела до точки \vec{r}' як в однорiдному середовищi. В точцi \vec{r}' вiдбувається збурення теплового поля за рахунок того, що ця точка належить вiклuчення або його границi (належнiсть \vec{r}' до вiклuчення вiзничачає усереднений оператор $\langle L_s(\vec{r}') \rangle$, в iнакшому вiпадку вiн дорiвнює нулю). Далi збурене поле досягає точки \vec{r} , в якiй вiдбувається спостереження (рис.2a).



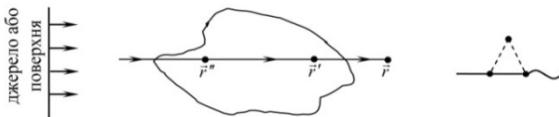


Рис. 2. Одно- та двократні збурення теплового поля

Діаграма 3 відповідає поширенню теплового поля від джерела до точки \vec{r}'' , яка знаходиться у вкліченні (оператор $\langle L_s(\vec{r}'') \rangle$), де отримує збурення, потім збурене поле поширюється до точки \vec{r}' , яка належить іншому вклічення (оператор $\langle L_s(\vec{r}') \rangle$), і отримує друге збурення; потім дівічі збурене поле поширюється до точки спостереження \vec{r} (рис. 2б). Діаграма 4 відрізняється від 3 наявністю кореляційної функції $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}'')$, що вказує на те, що дві точки збурення \vec{r}' і \vec{r}'' корельовані, тобто обидва збурення відбулися у тій самій неоднорідності (рис. 2в).

Всі діаграми третього порядку 5 - 9 містять функції $T_0(\vec{r}''')$, $G(\vec{r}'', \vec{r}''')$, $G(\vec{r}', \vec{r}''')$, $G(\vec{r}, \vec{r}''')$. Це означає, що теплове поле поширилось до точки \vec{r}' після збурення в точці \vec{r}'' , до точки \vec{r}''' - після збурення в точці \vec{r}'' і т. п. Отже, всі ці діаграми описують трикратне збурення теплового поля. Проте діаграми 5 - 9 є топологічно різними. Діаграма 5 не містить кореляційних функцій, тобто три збурення теплового поля відбулися в різних неоднорідностях. В діаграммах 6 - 8 наявні кореляційні функції $\Psi_2(\vec{r}'', \vec{r}''')$, $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}''')$ і $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}''')$ відповідно. Це означає, що поле збурюється тричі у двох неоднорідностях (рис. 3а-3в).

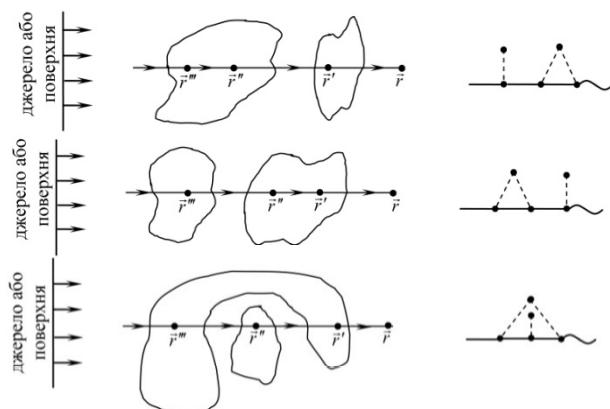


Рис. 3. Трикратні збурення теплового поля

Подання розв'язку задачі (1) у вигляді сукупності діаграм (6) дозволяє перетворювати ряд Неймана, використовуючи топологічні ознаки діаграм, які містить розв'язок.

Суму ряду (6) можна подати через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду. Для цього вводимо класифікацію діаграм на сильно- і слабков'язані, що входять у (6) [7]. Після виділення сильнов'язаних діаграм встановлено, що ряд (6) є розв'язком рівняння Дайсона

$$\begin{aligned} \text{---} &= \sim + \text{---} , \\ \text{---} &= \vdots + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \dots . \end{aligned} \quad (7)$$

де $\Sigma(r) \sim$

ядро масового оператора [3]. Рівняння Дайсона (7) в аналітичній формі має вигляд

$$\langle T(\vec{r}) \rangle = T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}' . \quad (7a)$$

Застосуємо до рівняння Дайсона (7) оператор $\bar{L}(\vec{r}) = \bar{\lambda} \Delta$. Тоді отримаємо

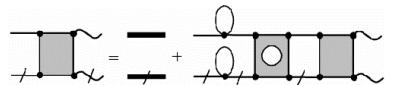
$$\bar{\lambda} \Delta \langle T(\vec{r}) \rangle = \bar{\lambda} \Delta T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} \bar{\lambda} \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}' . \quad (8)$$

Згідно з формулою (3) перший доданок рівняння (8) $\bar{\lambda} \Delta T_0(\vec{r}) = f(\vec{r})$, а зі співвідношення (4) випливає, що $\bar{\lambda} \Delta_r G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') - f(\vec{r})$. Тоді з використанням парності дельта-функції отримаємо

$$\bar{\lambda} \Delta \langle T(\vec{r}) \rangle - \Sigma(\vec{r}) \langle T(\vec{r}) \rangle + f(\vec{r}) \left[1 - \int_{(V)} \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}' \right] = 0 . \quad (9)$$

Із порівняння (3) і (9) випливає, що на відміну від $T_0(\vec{r})$, функція $\langle T(\vec{r}) \rangle$ задовільняє не диференціальне, а інтегро-диференціальне рівняння. З фізичної точки зору це означає, що усереднене поле в деякій точці \vec{r} залежить і від оточуючих що точку неоднорідностей (за рахунок ядра масового оператора $\Sigma(\vec{r})$).

З використанням техніки діаграм Фейнмана одержано рівняння типу Бете-Соллітера для функції когерентності, яке описує функцію кореляції стаціонарних температурних полів у багатофазних тілах стохастичної структури



Отже, подання розв'язку задачі у вигляді сукупності діаграм дозволяє перетворювати ряд Неймана, використовуючи топологічні ознаки діаграм, які входять у розв'язок. Також застосування такої техніки дає можливість виразити суму ряду Неймана через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Fu W.S., Wang K.-N., Ke W.-W. "Heat transfer of porous medium with random porosity model in a laminar channel flow", in J. of the Chinese Institute of Engineers, 2001, 24, N 4, P. 431-438.
- [2] Л.П. Хорошун "Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных тел", в Прикл. механика, 1978, 14, № 2, С. 3-17.
- [3] С.М. Рытов, Ю.А.Кравцов, В.И.Татарский Введение в статистическую радиофизику. Ч.II Случайные поля, М.: Наука, 1978, 436 с.
- [4] О.Ю. Чернуха, П.Р. Пелех "Стационарні процеси тепlopровідності в тілах випадково неоднорідної структури", Математичні методи і фізико-механічні поля, 2012, Т. 55, № 1, С. 179-187.
- [5] Р. Фейнман, А. Хіббс. Квантовая механика и интегралы по траекториям, М.: Мир, 1968, 454 с.
- [6] Y Chaplia., O. Chernukha "Physical-mathematical modelling dafusion processes in bodies of random structure using generalized functions and Feynman diagrams" in Int. J. Eng.Science, 2005, 43, № 17-18, P. 1337-1348.