Поперечні коливання в'язкопружних поздовжньо-рухомих гнучких елементів

Л.Ф. Дзюба
кафедра прикладної математики і механіки
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
lidadz111@gmail.com

О.І. Хитряк
кафедра інженерної механіки
(озброєння і техніки інженерних військ)
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Львів, Україна
khytriakolga@gmail.com

The transverse vibrations of viscoelastic axially-moving flexible elements

L. Dzyuba
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
lidadz111@gmail.com

O. Khytriak
Department of Engineering Mechanics
National Army Academy named after hetman P. Sahaidachnyi
Lviv, Ukraine
khytriakolga@gmail.com

***Анотація*—Досліджуються згинальні коливання рухомого паса пасової передачі, які описуються диференціальним рівнянням, що містить часову та просторову координати. Врахована нелінійність механічних властивостей матеріалу. Вона описана в'язкопружною моделлю Кельвіна – Фойгта. З урахуванням скінченої довжини гнучкого елемента прийнято припущення про вплив нелінійних сил на закони зміни в часі амплітуди і частоти згинальних коливань. Тому диференціальне рівняння вважається слабо нелінійним. Розв'язок слабо нелінійного диференціального рівняння в часткових похідних побудований з використанням методу Крилова-Боголюбова-Митропольського і поданий у вигляді асимптотичного ряду. Отримані на підставі побудованого розв'язку диференціальні залежності для амплітуди та фази згинальних коливань дослідити вплив швидкості поздовжнього руху, модуля Юнга та динамічної в'язкості матеріалу на амплітуду та частоту коливань.**

***Abstract*—In this article bending oscillations of moving belt drive, which is described by differential equations are investigated. They contain mixed derivative in time and space coordinates. The nonlinearity of the material mechanical properties is concidered. It was described by Kelvin - Voigt viscoelastic model. Taking into account the finite length of flexible element is made assumptions about the influence of nonlinear force on laws of change over time amplitude and frequency of the bending vibrations. Therefore, the differential equation considered to be weakly nonlinear. The solution of differential equation and method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky are presented as asymptotic series. Ordinary differential equations for the amplitude and phase of bending vibrations are obtained. It is investigated the influence of the velocity of longitudinal movement, Young's modulus and dynamic viscosity of the material on the amplitude and the frequency of vibration**

Ключові слова*—пасова передача, поздовжньо-рухомі гнучкі тіла, коливання, амплітуда, частота, хвильова теорія руху, в'язкопружна модель Кельвіна-Фойгта, методи збурень

Keywords*—belt drive, axially-moving flexible body, oscillations, amplitude, frequency, wave theory of motion, Viscoelastic Kelvin-Voigt model, perturbation methods

I. ВСТУП

Амплітуда згинальних коливань у поперечному напрямі під час поздовжнього руху гнучких ланок пасової передачі може досягати значних величин. Це негативно впливає на довговічність пасів [1]. Тому дослідження згинальних коливань гнучких ланок механічних передач є актуальним завданням. Рухомий пас пасової передачі можна подати у вигляді системи з розподіленими параметрами – гнучкого одновимірного елемента сталого поперечного перерізу з відповідними умовами закріплення кінців. Нелінійність такої системи, як правило, є геометричною, зумовленою властивостями матеріалу гнучкого елемента чи умовами силового навантаження в конструкції [2]. Наявність поздовжнього руху гнучких елементів створює суттєві математичні труднощі під час дослідження їхніх згинальних коливань. Адаптацією хвильової теорії руху до такого типу задач такі труднощі долаються за умови, що матеріал гнучкого елемента вважають абсолютно пружним[3, 4]. Однак гнучкі елементи, наприклад паси, виготовляють з вязкопружних матеріалів, в яких виникають пластичні деформації. Тому метою цієї роботи є: створення моделі для дослідження згинальних коливань поздовжньо-рухомого в'язкопружного гнучкого елемента і розробка ефективного підходу для її математичного аналізу.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Поперечні згинальні коливання в'язкопружного поздовжньо-рухомого гнучкого елемента описують у змінних Ейлера [5] диференціальним рівнянням [6]:

$$\rho\left(u_{tt}+2vu_{xt}+v^2u_{xx}\right)=\left(\frac{N}{A}+\sigma\right)u_{xx}+u_x\sigma_x, \qquad (1)$$

Не зменшуючи загальності, розглядаємо гнучкий елемент, довжина якого l, що, наприклад, дорівнює відстані між точками дотику паса до шківів пасової передачі. За умови постійного безвідривного контакту паса зі шківами допускаємо, що в місцях дотикання паса до шківів відсутні поперечні переміщення. Таке припущення зумовлене тим, що пас у конструкції передачі попередньо розтягнутий поздовжньою силою N. Це дозволяє долучити до рівняння (1) такі граничні умови:

$$u(x,t)_{|x=0}=u(x,t)_{|x=l}=0\,. \qquad (2)$$

де E^* – еквівалентний модуль Юнга, що є деяким диференціальним оператором відносно часу.

Прийнявши для матеріалу гнучкого елемента в'язко-пружну модель Кельвіна – Фойгта, в якій еквівалентний модуль Юнга

$$E^*=E_0\left(1+\frac{\eta}{E_0}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

отримаємо вираз для нормального напруження

$$\sigma(t)=E_0\varepsilon(t)+\eta(\varepsilon(t))_t', \qquad (4)$$

де E_0 — модуль Юнга, η — коефіцієнт динамічної в'язкості матеріалу.

З урахуванням (4) рівняння (1) набуває вигляду:

$$u_{tt}+2vu_{xt}-(\alpha^2-v^2)u_{xx}=\lambda\left(\widetilde{E}u_x^2u_{xx}+2\widetilde{\eta}u_{xx}u_{xt}u_x+\widetilde{\eta}u_{xxt}u_x^2\right), \qquad (5)$$

де λ – малий параметр, який у правій частині рівняння означає малу величину нелінійної складової сили порівняно з відновлювальною; $\widetilde{E}=3E_0(2\rho\lambda)^{-1}$; $\tilde{\eta}=\eta(\rho\lambda)^{-1}$; $\alpha^2=T(A\rho)^{-1}$.

III. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача (5), (2) належить до класу слабо нелінійних, що дозволяє для побудови її розв'язку застосувати загальні принципи методів збурень [8]. Відповідно до одного із цих методів, а саме методу Крилова-Боголюбова-Митропольського [9], розв'язок рівняння (5) у першому наближенні представимо у вигляді

$$u(x,t)=U_0(a,x,\psi)+\varepsilon U_1(a,x,\psi), \qquad (6)$$

де $\psi=\omega t+\varphi$; φ – початкова фаза коливань, a – амплітуда коливань; ω – частота ; $U_0(a,x,\psi)$ – розв'язок лінійного (при $\varepsilon=0$) аналогу задачі (5), (2); $U_1(a,x,\psi)$, – невідома 2π - періодична по ψ функція, яка задовольняє крайовим умовам, що випливають із (2).

Визначимо $U_0(a,x,\psi)$ як накладання прямої та відбитої хвиль із хвильовими числами κ та χ відповідно

$$U_0(t,x,y)=a\left(\cos(\kappa x+\omega t+\varphi)-\cos(\chi x-\omega t-\varphi)\right), \qquad (7)$$

де $\kappa=k\pi(\alpha+v)/\alpha l$, $\chi=k\pi(\alpha-v)/\alpha l$, $\omega=k\pi\left(\alpha^2-v^2\right)/\alpha l$, $k=1,2,\dots$.

Оскільки гнучкі елементи мають обмежені розміри, то нелінійні сили впливають тільки на закони зміни в часі амплітуди та частоти коливань, які у першому наближені задають у вигляді звичайних диференціальних рівнянь [9]:

$$\frac{da}{dt}=\lambda\Lambda(a);\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\lambda\Xi(a), \qquad (8)$$

де праві частини $\Lambda(a)$ і $\Xi(a)$ шукають так, щоб співвідношення (6) задовольняло з необхідним ступенем точності вихідне рівняння (5), в якому на місце параметрів a та ψ підставляють функції часу, визначені диференціальними рівняннями (8).

Накладаємо додаткову умову, щоб функція $U_1(a,x,\psi)$ її частинні похідні по ψ і x до другого порядку включно не містили у розкладах доданків пропорційних головним гармонікам. Підставляючи в (1) вираз (6) з урахуванням (8) після усереднення по лінійній та часовій змінних, отримуємо остаточний вигляд диференціальних рівнянь для визначення амплітуди та частоти коливань:

$$\frac{da}{dt}=\frac{-\lambda\tilde{\eta}k^4\pi^4\left(7v^4+6v^2\alpha^2+3\alpha^4\right)}{8l^4\alpha^4\left(\alpha^4-v^4\right)}a^3;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\lambda \widetilde{E} k^3 \pi^3 \left(7v^4 + 6v^2\alpha^2 + 3\alpha^4\right)}{8 l^3 \alpha^3 \left(\alpha^4 + v^4\right)} a^2. \quad (9)$$

Висновки

Отримані аналітичні залежності дозволяють визначити амплітуду та частоту згинальних коливань поздовжньо-рухомого гнучкого елемента. На підставі розв'язку диференціальних рівнянь (10) можна дослідити вплив швидкості поздовжнього руху, модуля Юнга та динамічної в'язкості матеріалу на амплітуду та частоту коливань.

Література References

[1] Василенко Н.В. Теория колебаний/ учебное пособие. – Киев: Вища шк. 1992 – 430 с.

[2] Павлище В.Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин:Підруч. – 2-е вид. перероб. – Львів: Афіша, 2003.- 558 с.

[3] Сокіл М. Б. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів приводу та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху / М. Б. Сокіл, О. І. Хитряк // Військово – технічний збірник. – Львів: АСВ, 2011. – Вип. 1. – С. 102–105.

[4] Харченко Є. В. Коливання рухомих нелінійно пружних середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні / Є. В. Харченко, М. Б. Сокіл //Збірник науково-технічних праць НЛТУУ. – Львів: 2006. – Вип. 16.1. – С. 134–138.

[5] Зельдович Я. Б. Элементы математической физики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис.– М. : Наука, 1973. – 352 с.

[6] Fung, R. F., Huang, J.S., and Chen. Y.C., 1997, 'The Transient Amplitude of the Viscoelastic Traveling String: an Integral Constitutive Law", Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, No. 2., pp. 153- 167.

[7] Fiügge, W., 1975, Viscoelasticity, Second Edition, Springer-Veriag, Berlin.

[8] Найфе А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфе. – М. : Мир, 1976. – 456 с.

[9] Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – М. : Наука, 1974. – 501 с.