[7] Qi C., Wu J. "Stochastic heat transfer equation and its application in the permafrost region" in Heat Transfer Research, 2011, 42, №5, P. 433-449.

До побудови градієнтного типу моделі термопружних тіл

О. Р. Грицина
відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
grvt@cmm.lviv.ua, gryt045@gmail.com

On the formulation of gradient-type theory of thermoelastic solids

O. R. Hrytsyna
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
gryt@cmm.lviv.ua, gryt045@gmail.com

***Анотація*—Отримано замкнену систему співвідношень градієнтної термопружності, що враховує вплив локального зміщення маси на механічні та теплові процеси. Для опису локального зміщення маси введено у розгляд нові параметри, для яких сформульовано відповідне балансове рівняння. Розв'язувальну систему рівнянь моделі одержано для лінійних термопружних тіл. На цій основі на прикладі ізотропних пружних шару та кулі визначено поверхневу енергію деформації та вивчено вплив характерної віддалі на механічні поля. Показано, що побудована теорія дозволяє описати нелокальні ефекти, зокрема, приповерхневі та масштабні ефекти.**

***Abstract*—The fundamental set of equations for gradient thermoelasticity is obtained. Mentioned equations take into account the effect of a local mass displacement on mechanical and thermal processes. New quantities associated with local mass displacement were introduced and we obtained for it additional balance relation. The linear equations governing the motion of thermoelastic solids within the framework of this gradient theory are set out. We obtained formula for surface energy of deformation of solids. The boundary value problem is presented to study the effect of the characteristic length parameter on mechanical fields in isotropic elastic layer and sphere. It is shown that the developed theory is capable of predicting nonlocal effects, such as the near surface and size effects.**

Ключові слова—градієнтна термопружність; локальне зміщення маси; поверхневі напруження; поверхнева енергія деформації; масштабний ефект

Keywords—Gradient thermoelasticity; local mass displacement; surface stresses; surface energy of deformation ; size effect.

I. Вступ

Аналіз закономірностей розвитку сучасної науки свідчить про неухильний зростаючий інтерес науковців до розробляння нових узагальнених теорій механіки з метою врахування впливу мікроструктури матеріалу на механічну поведінку твердих тіл. Побудову такого штибу теорій стимулювали потреби сучасної техніки (необхідність у розроблянні нових нанопористих і нанокомпозитних матеріалів, впровадження нанотехнологій тощо) та внутрішня логіка розвитку континуальної механіки. У результаті таких досліджень було сформульовано низку нелокального типу моделей пружних і термопружних тіл, зокрема, нелокальну теорію Ерінгена, градієнтну теорію пружності Міндліна, моделі мікрополярних, мультиполярних, мікроморфних пружних й термопружних середовищ та ін. У пропонованому дослідженні розвинуто нелокальну теорію деформування твердих термопружних тіл шляхом врахування у модельному описі впливу локального зміщення маси на механічні та теплові поля. При цьому локальне зміщення маси пов'язано з потоком маси $\mathbf{J}_{ms}$ недифузійної та неконвективної природи, зумовленим структурною перебудовою матеріалу. На прикладі вільних від зовнішнього навантаження ізотропних тіл канонічної форми проаналізовано можливість використання розробленої теорії для опису приповерхневих та масштабних ефектів.

II. Система рівнянь моделі

Розглядаємо деформівне тверде тіло, в якому протікають механічні й теплові процеси. Характеризуватимемо їх відповідно тензорами напружень Коші $\hat{\sigma}$ й деформації $\hat{e}$, а також абсолютною температурою T, питомою ентропією s та вектором потоку тепла $\mathbf{J}_q$. Будемо також враховувати можливість зміни структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Пов'яжемо згадані структурні зміни з процесом локального зміщення маси. Для опису цього процесу введемо у розгляд вектори локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ й потоку маси $\mathbf{J}_{ms}$. Вважаємо, що згадані вектори пов'язані формулою

$$\boldsymbol{\pi}_m(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\rho}\int_0^t \mathbf{J}_{ms}(\mathbf{r},t')\,dt',$$

де $\mathbf{r}$ – радіус вектор, ρ – густини маси, t – час. Введемо також потенціал μ_π, як енергетичну міру впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи, а густину наведеної маси ρ_m означимо формулою: $\rho_m = -\rho^{-1}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\pi}_m)$. Введені вище величини підпорядковані балансовому рівнянню:

$$\frac{\partial(\rho\rho_m)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_{ms} = 0. \qquad (1)$$

Систему співвідношень математичної моделі, що описує закономірності зв'язаних полів та процесів у твердому пружному тілі будемо формулювати, ґрунтуючись на рівнянні балансу повної енергії, в якому поряд із відомими з літератури складниками будемо також враховувати потік енергії, пов'язаний з роботою, затраченою на перенесення частинок фізично малого елемента тіла відносно його центра мас, та потік енергії $\mu_\pi \mathbf{J}_{ms}$, пов'язаний з роботою, виконаною внаслідок локального зміщення маси [1]. За врахування рівняння балансу ентропії з умови інваріантності рівняння балансу повної енергії системи щодо просторових трансляцій отримуємо рівняння балансу маси й механічного імпульсу:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho\mathrm{F}_* = \rho\frac{d\mathrm{v}}{dt}, \qquad (2)$$

а також рівняння балансу внутрішньої енергії, на основі якого формулюємо вираз для виробництва ентропії та узагальнене рівняння Гіббса. Останнє визначає такі нелокальні рівняння стану:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho\frac{\partial f}{\partial\hat{e}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad \mu'_\pi = \frac{\partial f}{\partial\rho_m}, \quad \boldsymbol{\pi}_m = \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)}. \qquad (3)$$

Тут $\mathbf{v}$ – вектор швидкості, f – вільна енергія Гельмгольца, $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$, μ – хімічний потенціал, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho(\rho_m\mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m\cdot\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)\hat{\mathrm{I}}$, $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F} + \rho_m\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi$, $\mathbf{F}$ – вектор масових сил, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$. Замкнена система рівнянь градієнтної термопружності, що враховує взаємозв'язок процесів деформування, теплопровідності та локального зміщення маси, охоплює: рівняння балансу ентропії, механічного імпульсу й маси (2), наведеної маси (1); відповідні геометричні й кінетичні співвідношення, а також рівняння стану (3). Загалом це нелінійна система рівнянь. Розв'язувальну систему рівнянь моделі сформульовано для випадку лінійного ізотропного тіла.

III. Приповерхневі та масштабні ефекти

За ізотермічного наближення співвідношення розробленої теорії застосовані для обчислення поверхневої енергії деформації, а також вивчення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану у вільних від зовнішнього навантаження тілах із плоскопаралельними та сферичними межами. Встановлено, що поверхнева енергія деформації визначається поверхневим значенням проекції на нормаль до поверхні тіла вектора локального зміщення маси [2]. Дослідження поверхневої енергії деформації у твердих тілах показали, що у тонкому тілі з плоскопаралельними межами абсолютне значення поверхневої енергії деформації зменшується у міру зменшення його товщини. Зі збільшенням кривини опуклої поверхні абсолютне значення поверхневої енергії деформації зменшується, порівняно з тілом із плоскою межею.

Висновки

Наслідком врахування у модельному описі впливу локального зміщення маси на процеси деформування та теплоперенесення є нелокальні визначальні співвідношення. З огляду на це розроблена за такого підходу градієнтного типу теорія термопружних твердих тіл дозволяє описати приповерхневі та масштабні ефекти, у тому числі, кількісно досліджувати поверхневі напруження й натяг, поверхневу енергію деформації, вивчати на континуальному рівні вплив вільної поверхні та її кривини на напружено-деформований стан малорозмірних об'єктів (тонких плівок, малих частинок тощо).

Література References

[1] О. Грицина, Крайові задачі нелокальної термопружності з урахуванням локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. — С. 79-88.

[2] О. Грицина, Визначення поверхневої енергії твердих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 43-54.