Покращений степеневий метод знаходження найбільшого за модулем власного числа матриці

Я.І. Кость
кафедра радіофізики та комп'ютерних технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна
kostjerry@gmail.com

Improvement of the power method for eigenvalues

Y. Kost
Department of Radiophysics And Computer Technologies
Ivan Franko Lviv National University
Lviv, Ukraine
kostjerry@gmail.com

***Анотація*—Запропоновано покращення степеневого методу знаходження найбільшого за модулем власного числа матриці загального вигляду. Показано на прикладах, що метод працює ефективно для матриць із будь-яким набором власних чисел, що належать комплексній множині.**

***Abstract*—An improvement of the power method for eigenvalues proposed. The efficiency of the method shown for any matrices with eigenvalues form the complex plain. Shown that power method is very appropriate for the use in adaptive solver for stiff systems.**

Ключові слова—степеневий метод; найбільше за модулем власне число; комплексні власні числа матриці, жорсткість

Keywords—power method; max eigenvalue; complex eigenvalues, stiffness

I. Вступ

Вже віддавна в основі будь-якої природничої науки лежить експеримент. Він з'ясовує достовірність теоретичних знань, а також встановлює зв'язок із їхнім практичним застосуванням. Існує два основних способи проведення експерименту: фізичний та чисельний.

Часто чисельний експеримент зводиться до задачі Коші [1] – розв'язання системи диференційних рівнянь (математичної моделі) на заданому проміжку із заданими початковими умовами.

У математичному моделюванні існує особливий клас задач, для розв'язання яких необхідно затратити невиправдано багато обчислювальних ресурсів. У цих задачах присутні як швидкоплинні, так і повільні процеси. Проблема в тому, що швидкоплинні процеси (зазвичай, це перехідні процеси) накладають сильні обмеження на крок інтегрування. Після їхнього затухання, коли мають місце повільні процеси, крок інтегрування теоретично можна було б збільшувати. Проте, незавершені швидкоплинні процеси, які вже не дають видимого вкладу в розв'язок, вносять свою корективу у стійкість процесу інтегрування. Тобто, якщо проміжки, що повільно змінюються, інтегрувати з допомогою явних методів та пробувати збільшувати крок, то процес стає нестійким, розв'язки накопичують великі похибки і стають недостовірними. Таким чином, ділянки розв'язку, які повільно змінюються, вимагають від явних методів невиправдано, з точки зору задовільної точності, малого кроку. Такі задачі називають жорсткими [1].

Існує спеціальний клас методів для розв'язання жорстких задач, які, проте, не є ефективними для нежорстких випадків.

Цікавим є те, що жорсткість задачі може змінюватися у процесі інтегрування. Тому постає питання динамічного вибору класу методу інтегрування.

З літератури відомо [2-3], що в цьому може допомогти визначення найбільшого за модулем власного числа матриці Якобі лінеаризованої системи дифрівнянь, яку інтегруємо. Оскільки в процесі інтегрування такі обчислення необхідно проводити багатократно, то метод знаходження найбільшого за модулем власного числа матриці має бути дуже швидким. Також наголосимо, що він не мусить бути точним, оскільки для перемикання методів інтегрування нам достатньо наближеної оцінки власного числа. Після огляду літератури наш вибір зупинився на ітераційних методах. Найшвидшим з них є степеневий.

II. Покращений степеневий метод

У найпростішому вигляді степеневий метод формулюється так:

$$y^{(k+1)} = Ay^{(k)}, \lambda_{\max}^{(k+1)} = \frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} \qquad (1),$$

де $y^{(k)}$ - k-те наближення власного вектора, $y_j^{(k+1)}$ і $y_j^{(k)}$ – відповідні компоненти векторів $y^{(k+1)}$ та $y^{(k)}$ (при цьому в якості номера j може використовуватися будь-яке число з діапазону $j = \overline{1,n}$), n - розмір вектора y.

Ось його переваги:

- простий у реалізації;
- ітераційний;
- швидкий.

Проте, є і недоліки:

- повільно збігається коли два найбільші за модулем власні числа близькі за значенням;
- потрібно задавати початкове наближення власного вектора;
- стандартний алгоритм степеневого методу не працює коли найбільше за модулем власне число комплексне.

В інтернеті у відкритому доступі є код програми на С++ [4] степеневого методу, який працює для випадків, коли матриця має комплексно-спряжені власні числа.

Тестування цього коду показало, що він має недолік. Метод не збігається у деяких випадках, коли найбільше за модулем власне число дійсне.

Після аналізу коду, у ньому було знайдено логічне недоопрацювання, яке полягає в неповному аналізі дискримінанта квадратного рівняння. Код було модифіковано і перевірено на тестових задачах.

III. Тестування покращенго степеневого методу

Тестові задачі вибирались такими, щоб охопити всі варіанти матриць, які могли б вплинути на ефективність методу.

Тест №1. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.

Тест №2. $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$.

Тест №3. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

Тест №4. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.001$.

Тест №5. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$.

Тест №6. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$.

Тест №7. $\lambda_1 = 10.08$, $\lambda_2 = -3.54+2.98i$, $\lambda_3 = -3.54-2.98i$.

Тест №8. $\lambda_1 = -0.08+14.59i$, $\lambda_2 = -0.08-14.59i$, $\lambda_3 = -0.83$.

Порівняння проводилось із готовою реалізацією [5] методу QR [6]. Він знаходить всі власні числа матриці загального вигляду та вважається одним із найкращих для розв’язання повної матричної проблеми. Для покращеного степеневого методу було задано похибку $\varepsilon = 10^{-2}$.

Таблиця I. Результати тестування покращеного степеневого методу (PM) порівняно із методом QR

Тест №	PM, ітерацій	PM, збільшення швидкодії, у скільки раз	PM, відносна похибка $\lvert\lambda_{\max}\rvert$, %
1	1	4,2	0,00
2	1	2,0	0,00
3	0	5,9	0,00
4	1	2,5	0,00
5	1	4,2	0,00
6	1	4,7	0,00
7	4	1,9	0,05
8	2	3,6	0,10

З таблиці видно, що покращений степеневий метод дає значний виграш у швидкодії порівняно з методом QR, зберігаючи розв’язки в межах допустимої похибки.

Висновки

Виправлено недолік у покращеному степеневому методі оцінки найбільшого за модулем власного числа матриці загального вигляду.

Показано, що покращений степеневий метод добре підходить для використання в адаптивному алгоритмі моделювання жорстких систем, що дає змогу оптимізувати витрати обчислювальних ресурсів в задачах математичного моделювання.

Література References

[1] І.О. Хвищун, Програмування і математичне моделювання: Підручник, К.: Ін Юре, 2007.

[2] Е.А. Новиков, под ред. А.Н. Горбань., Явные методы для жестких систем, Новосибирск: Наука. Сиб. Предприятие РАН, 1997.

[3] Э. Хайрер, Г. Ваннер, Решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи, М.: Мир, 1999.

[4] Інтернет ресурс: http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/power_method/power_method.cpp

[5] Інтернет ресурс: http://www.alglib.net

[6] Дж.Х. Уилкинсон, Алгебраическая проблема собственных значений, М.: Наука, 1970.