Загальна перша дискретно-неперервна крайова задача для рівняння гіперболічного типу

Р.М. Таци́й
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна

О.О. Карабин
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
tosjakarabyn@gmail.com

О.Ю. Чмир
кафедра прикладної математики і механіки
ЛДУ безпеки життєдіяльності
Львів, Україна
o_chmyr@yahoo.com

The total first discretely-continuous boundary value problem for equation of hiperbolic type

R.M. Tatsij
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine

O.O. Karabyn
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine
tosjakarabyn@gmail.com

O.Yu. Chmyr
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lviv State University of vital activity safety
Lviv, Ukraine
o_chmyr@yahoo.com

***Анотація*—Запропоновано та обґрунтовано нову схему розв'язування загальної першої дискретно-неперервної крайової задачі для рівняння гіперболічного типу з кусково-сталими коефіцієнтами та точковими зосередженнями. В основу схеми розв'язування покладено концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь з мірами, а також класичний метод Фур'є та метод редукції. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім на основі матричного числення об'єднати отримані розв'язки. Такий підхід дозволяє застосувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.**

***Abstract*—A new solving scheme of the general first discretely-continuous boundary value problem for a hyperbolic type equation with piecewise constant coefficients and pointed concentrations was proposed and justified. In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations with measures, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows to use software tools for the solution.**

Ключові слова — квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.

Keywords — kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

I. Вступ

Основними методами розв'язування крайових задач є: прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних та метод функції Ґріна.

Запропонована в даній роботі схема належить до прямих методів розв'язування крайових задач для рівнянь гіперболічного типу. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних, що дозволяє "обійти" проблему множення узагальнених функцій.

Першою була роз'язана мішана задача для рівняння теплопровідності з кусково - неперервними коефіцієнтами за загальних крайових умов першого роду [1].

Авторами досліджено загальну першу дискретно-неперервну крайову задачу для рівняння гіперболічного типу з кусково-сталими коефіцієнтами та точковими зосередженнями. За допомогою методу редукції розв'язування такої задачі зведено до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної однорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

II. Постановка та розв'язок задачі

Розглядається мішана задача для рівняння гіперболічного типу

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ x\in[0;l],\ t\in(0;+\infty) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0,t)=\psi_0(t), \\ u(x_n,t)=\psi_n(t), \end{cases} t\in[0;+\infty) \quad (2)$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_1(x), \end{cases} x\in[0;l], \quad (3)$$

де $0=x_0<x_1<...<x_n=l$ – довільне розбиття відрізка $[0;l]$ дійсної осі OX на n частин, функції $\psi_0(t)$, $\psi_n(t)\in C^2(0;\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(0;l)$.

Покладемо, що $m(x)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\theta_i+\sum_{i=1}^{n-1}M_i\delta(x-x_i)$, $\lambda(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\theta_i$, де m_i, M_i, λ_i – дійсні числа, θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i;x_{i+1}]$, $\delta_i=\delta_i(x-x_i)$ – δ - функція Дірака з носієм в точці $x=x_i$.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t).$$

Розглянемо функцію $w(x,t)$. Ця функція є розв'язком однорідного рівняння

$$(\lambda w_x')_x'=0, \quad (4)$$

з неоднорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} w(x_0,t)=\psi_0(t), \\ w(x_n,t)=\psi_n(t). \end{cases} \quad (5)$$

Рівняння (4) є квазідиференціальним рівнянням. Побудова розв'язку $w(x,t)$ квазідиференціальної задачі (4), (5) на основі властивостей матриці Коші детально описана в [1]:

$$w(x,t)=\sum_{i=0}^{n-1}w_i(x,t)\theta_i,$$

де $$w_i(x,t)=\psi_0(t)+\frac{\psi_n(t)-\psi_0(t)}{\sigma_n}(b_i(x,x_i)+\sigma_i),$$

$b_i(x,x_i)=\dfrac{x-x_i}{\lambda_i}$, $\sigma_i=\sum_{m=0}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m)$.

Функцію $v(x,t)$ шукаємо як розв'язок мішаної неоднорідної задачі

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} v(x,0)=\Phi_0(x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\Phi_1(x), \end{cases} \quad (7)$$

де $\Phi_0(x)=\varphi_0(x)-w(x,0)$, $\Phi_1(x)=\varphi_1(x)-\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)$, з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} v(x_0,t)=0, \\ v(x_n,t)=0. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язок задачі (6)-(8) шукаємо методом Фур'є у вигляді

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x,\omega_k). \quad (9)$$

Власні функції $X_k(x,\omega_k)$ є розв'язком узагальненої задачі на власні значення [2]

$$(\lambda X')'+\omega^2 mX=0,$$

$$\begin{cases} X(x_0)=0, \\ X(x_n)=0. \end{cases}$$

Підставляючи функцію $v(x,t)$ у вигляді (9) в рівняння (6) та розвинувши праву частину рівняння (6) за власними функціями $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k)$, приходимо до диференціального рівняння

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = -w_k(t),$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t - \\ -\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s) w_k(s)ds, \qquad (10)$$

де a_k, d_k – невідомі сталі.

Розвиваємо праві частини початкових умов (7) в ряди за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ та підставляємо (9) в (7). Це дозволяє отримати $a_k = \Phi_{0k}$, $d_k = \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}$, де Φ_{0k}, Φ_{1k} – коефіцієнти розвинень за власними функціями правих частин початкових умов (7).

Підставлюючи (10) в (9), остаточно отримуємо розв'язок задачі (6)-(8)

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}\sin\omega_k t - \right. \\ \left. -\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s) w_k(s)ds\right] X_k(x,\omega_k).$$

Сума функцій $w(x,t)$ та $v(x,t)$ дають розв'язок задачі (1)-(3).

Висновки

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервала основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів. Отримані результати мають безпосереднє застосування в прикладних задачах.

Література References

[1] Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтам / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. - 2014. - № 804. - С. 64-69.

[2] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Математичні методи та фізико-механічні поля. - 2001. - 44. №1 - С. 43-53.